第27卷 第5期
2010年10月

工 程 数 学 学 报

CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 27 No. 5
Oct. 2010

文章编号:1005-3085(2010)05-0845-08

利用函数变换构造非线性发展方程新的复合型精确解*

套格图桑, 斯仁道尔吉

(内蒙古师范大学数学科学学院，呼和浩特 010022)

摘 要: 为了获得非线性发展方程新的复合型精确解，本文引入了一种函数变换，把常系数的非线性发展方程转化为二阶非齐次线性常微分方程。在此基础上利用常微分方程的理论和符号计算系统Mathematica及用 $(2+1)$ 维修改的色散水波方程，构造了新的复合型精确解。这些解中包括指数函数、三角函数和有理函数，通过这几种形式组合而成的复合型单孤子解和双孤子解。

关键词: 函数变换; 常微分方程; 非线性发展方程; 复合型精确解

分类号: **AMS**(2000) 35Q51　　**中图分类号**: O175.29　　**文献标识码**: A

1 引言

在非线性发展方程(组)的求解领域中有许多方法[1-7]。有关文献里用齐次平衡法和一些函数变换，把一些非线性发展方程(组)转化为线性偏微分方程。比如文献[8]中讨论了下列 $(2+1)$ 维修改的色散水波方程

$$u_{ty}+u_{xxy}-2v_{xx}-(u)^2_{xy}=0, \tag{1}$$

$$v_t-v_{xx}-2(uv)_x=0. \tag{2}$$

方程(1),(2)经过下列变换

$$u(x,y,t)=\frac{\varphi_x(x,y,t)}{\varphi(x,y,t)}+M,\quad v(x,y,t)=\frac{\varphi_{xy}(x,y,t)}{\varphi(x,y,t)}-\frac{\varphi_x(x,y,t)\varphi_y(x,y,t)}{\varphi^2(x,y,t)}=u_y(x,y,t), \tag{3}$$

变成为

$$\varphi_t-\varphi_{xx}-2M\varphi_x+(-M^2+\gamma+\delta)\varphi=0, \tag{4}$$

这里 γ, δ 是积分常数。从许多文献中看出，一些非线性发展方程经过函数变换，变成为下列形式的偏微分方程

$$\varphi_t+A\varphi_x+B\varphi_y+C\varphi_{xx}+D\varphi_{xy}+E\varphi_{yy}+F\varphi=0, \tag{5}$$

其中 A, B, C, D, E, F 是不全为零的任意常数。

这样，讨论方程(5)的复合型精确解，显得有非常重要的意义。本文首先用一种函数变换，将方程(5)转化为一个二阶非齐次线性常微分方程，然后利用常微分方程理论和符号计算系

收稿日期: 2008-12-12. **作者简介**: 套格图桑(1964年2月生)，男，副教授. 研究方向：孤立子与可积系统理论及其应用.

***基金项目**: 国家自然科学基金(10461006)；内蒙古自治区高等学校科学研究基金(NJZZ07031)；内蒙古自治区自然科学基金(200408020103)；内蒙古师范大学自然科学研究计划(QN005023).

统 Mathematica，构造了 $(2+1)$ 维修改的色散水波方程新的复合型精确解。这些解包括了指数函数、三角函数和有理函数组合而成的复合型单孤子解和双孤子解。

2 方法的介绍

本文以 $(2+1)$ 维非线性发展方程为例介绍求解方法。为了得到 $(2+1)$ 维非线性发展方程的复合型精确解，给出下列函数变换

$$\varphi(x,y,t)=q(\xi)+p(\xi)\exp(k\xi),\quad \xi=mx+ny+\mu t. \tag{6}$$

用函数变换 (6) 把方程 (5) 转化为下列二阶非齐次线性常微分方程

$$p''(\xi)+A_1p'(\xi)+A_2p(\xi)=\exp(-k\xi)G(\xi), \tag{7}$$

其中

$$A_1=\frac{Am+2Ckm^2+Bn+2Dkmn+2Ekn^2+\mu}{Cm^2+Dmn+En^2},$$

$$A_2=\frac{F+Akm+Ck^2m^2+Bkn+Dk^2mn+Ek^2n^2+k\mu}{Cm^2+Dmn+En^2},$$

$$G(\xi)=-\frac{1}{Cm^2+Dmn+En^2}\big[[Cm^2+Dmn+En^2]q''(\xi)+[Am+Bn+\mu]q'(\xi)+Fq(\xi)\big],$$

$$q=q(\xi)=q(mx+ny+\mu t)$$

是任意 s 阶可微函数。

下面限定 $q=q(\xi)=q(mx+ny+\mu t)$ 是关于 ξ 的 s 次已知多项式，即 $G(\xi)$ 是关于 ξ 的 s 次已知多项式时，讨论方程 (7) 解的情况。方程 (7) 的特征方程为

$$\lambda^2+A_1\lambda+A_2=0. \tag{8}$$

考虑下面的三种情况：

情形1 当

$$A_1^2-4A_2=\frac{(A^2-4CF)m^2+(2AB-4FD)mn+(B^2-4EF)n^2+(2Bn+2Am)\mu+\mu^2}{[Cm^2+n(Dm+En)]^2}>0$$

时，特征方程 (8) 存在两个不同的实根

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\Big(-A_1\pm\sqrt{A_1^2-4A_2}\,\Big), \tag{9}$$

这样方程 (8) 所对应的齐次线性常微分方程的通解为

$$p(\xi)=C_1\exp(\lambda_1\xi)+C_2\exp(\lambda_2\xi). \tag{10}$$

当 $A_2+k^2=kA_1$ 时，$\lambda_1=\lambda_2=-k$，即 $\lambda=-k$ 是特征根。这样，方程 (7) 有形如

$$p_0(\xi)=\sum_{j=0}^{s}a_j\xi^{j+2}\exp(-k\xi) \tag{11}$$

的特解，其中 $a_j\,(j=0,1,2,\cdots,s)$ 是 $G(\xi)$ 的系数来确定的常数。

当 $A_2+k^2\neq kA_1$ 时，$\lambda_1\neq -k$ 且 $\lambda_2\neq -k$, 即 $\lambda=-k$ 不是特征单根。这样，方程 (7) 有形如

$$p_1(\xi)=\sum_{j=0}^{s} b_j\xi^j\exp(-k\xi) \tag{12}$$

的特解，其中 $b_j\,(j=0,1,2,\cdots,s)$ 是 $G(\xi)$ 的系数来确定的常数。

根据常微分方程理论，可知方程 (7) 有下列两种通解

$$p(\xi)=\Big(C_1+C_2\xi+\sum_{j=0}^{s} a_j\xi^{j+2}\Big)\exp(-k\xi), \tag{13}$$

$$p(\xi)=C_1\exp(\lambda_1\xi)+C_2\exp(\lambda_2\xi)+\sum_{j=0}^{s} b_j\xi^j\exp(-k\xi). \tag{14}$$

将 (11) 式或 (12) 式分别代入方程 (7)，并令 ξ 各自幂的系数为零后得到一个 $a_j\,(j=0,1,2,\cdots,s)$ 或 $b_j\,(j=0,1,2,\cdots,s)$ 为未知量的线性代数方程组，借助符号计算系统 Mathematica 求出该方程组的解。再把得到的解代入 (13) 或 (14) 即可得到方程 (7) 的通解。

情形 2　当 $A_1^2-4A_2=0$，即

$$F=\frac{A^2m^2+B^2n^2+2Bn\mu+\mu^2+2Am(Bn+\mu)}{4Cm^2+4Dmn+4En^2}$$

时，特征方程 (8) 存在两个相同的实根

$$\lambda_1=\lambda_2=-\frac{1}{2}A_1, \tag{15}$$

这样方程 (7) 所对应的齐次线性常微分方程的通解为

$$p(\xi)=(C_3+C_4\xi)\exp(\lambda_1\xi). \tag{16}$$

当 $A_1=2k$ 时，$\lambda_1=\lambda_2=-k$，即 $\lambda=-k$ 是特征根。这样，方程 (7) 有形如

$$p_2(\xi)=\sum_{j=0}^{s} c_j\xi^{j+2}\exp(-k\xi) \tag{17}$$

的特解，其中 $c_j\,(j=0,1,2,\cdots,s)$ 是 $G(\xi)$ 的系数来确定的常数。

当 $A_1\neq 2k$ 时，$\lambda_1\neq -k$ 且 $\lambda_2\neq -k$，即 $\lambda=-k$ 不是特征单根。这样，方程 (7) 有形如

$$p_3(\xi)=\sum_{j=0}^{s} d_j\xi^j\exp(-k\xi) \tag{18}$$

的特解，其中 $d_j\,(j=0,1,2,\cdots,s)$ 是 $G(\xi)$ 的系数来确定的常数。

根据常微分方程理论，可知方程 (7) 有下列两种通解

$$p(\xi)=(C_3+C_4\xi)\exp(\lambda_1\xi)+\sum_{j=0}^{s} c_j\xi^{j+2}\exp(-k\xi), \tag{19}$$

$$p(\xi)=(C_3+C_4\xi)\exp(\lambda_1\xi)+\sum_{j=0}^{s} d_j\xi^j\exp(-k\xi). \tag{20}$$

将(17)式或(18)式分别代入方程(7)，并令ξ各自幂的系数为零后得到一个$c_j\,(j=0,1,2,\cdots,s)$或$d_j\,(j=0,1,2,\cdots,s)$为未知量的线性代数方程组，借助符号计算系统Mathematica求出该方程组的解。再把得到的解代入(19)或(20)即可得到方程(7)的通解。

情形3 当

$$A_1^2-4A_2=\frac{(A^2-4CF)m^2+(2AB-4FD)mn+(B^2-4EF)n^2+(2Bn+2Am)\mu+\mu^2}{[Cm^2+n(Dm+En)]^2}<0$$

时，特征方程(8)存在两个不同的复数根

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\Big(-A_1\pm\sqrt{-A_1^2+4A_2\mathrm{i}}\,\Big). \tag{21}$$

当

$$A_1=\frac{Am+2Cm^2+Bn+2Dmn+2En^2+\mu}{Cm^2+Dmn+En^2}=2k$$

时，考虑下面的$G(\xi)$，讨论方程(7)的解

$$G(\xi)=\Big[\alpha(\xi)\cos\big(\sqrt{-k^2+A_2}\xi\big)+\beta(\xi)\sin\big(\sqrt{-k^2+A_2}\xi\big)\Big]\exp(-k\xi), \tag{22}$$

其中$\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$是关于ξ的次数不超过s的已知多项式。

因为$\lambda_{1,2}\neq -k$，所以$\lambda_{1,2}$不是特征根。这样，方程(7)有形如

$$p_4(\xi)=\Big[P(\xi)\cos\big(\sqrt{-k^2+A_2}\xi\big)+Q(\xi)\sin\big(\sqrt{-k^2+A_2}\xi\big)\Big]\exp(-k\xi) \tag{23}$$

的特解，其中$P(\xi)$, $Q(\xi)$的系数是由$\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$的系数来确定的。

根据以上讨论可知，方程(7)的通解为

$$p(\xi)=\Big[C_5\cos\big(\sqrt{-k^2+A_2}\xi\big)+C_6\sin\big(\sqrt{-k^2+A_2}\,\xi\big)\Big]\exp(-k\xi)+p_4(\xi), \tag{24}$$

其中$C_l\,(l=1,2,\cdots,6)$是任意常数。

3 构造复合型精确解

下面用该方法构造$(2+1)$维修改的色散水波方程新的复合型精确解。

把变换(6)代入(4)得到下列方程

$$p''(\xi)+A_1p'(\xi)+A_2p(\xi)=G(\xi)\exp(-k\xi), \tag{25}$$

其中

$$A_1=\frac{-2Mm-2km^2+\mu}{-m^2},\quad A_2=\frac{F+Mkm-k^2m^2+k\mu}{-m^2},$$

$$G(\xi)=\frac{1}{m^2}\big[-m^2q''(\xi)+[-2Mm+\mu]\,q'(\xi)+[-M^2+\gamma+\delta]\,q(\xi)\big],$$

$$q=q(\xi)=q(mx+ny+\mu t).$$

从以上讨论的结果(13), (14), (19), (20), (24)可知

$$A=-2M,\quad B=D=E=0,\quad C=-1,\quad F=-M^2+\gamma+\delta.$$

这样，方程 (25) 有下列三种通解。方程 (25) 的特征方程为

$$\lambda^2 + A_1\lambda + A_2 = 0. \tag{26}$$

下面分三种情况讨论：

情形 1 当

$$A_1^2 - 4A_2 = \frac{\mu^2 + 4m^2(\gamma+\delta) - 4mM\mu}{m^4} > 0$$

时，方程 (25) 的特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2m^2}\left[\mu - 2km^2 - 2Mm \pm \sqrt{\mu^2 + 4m^2(\gamma+\delta) - 4mM\mu}\,\right]. \tag{27}$$

当

$$M = \sqrt{\gamma+\delta} > 0, \quad 2mM - \mu > 0, \quad 或 \quad M = -\sqrt{\gamma+\delta} > 0, \quad 2mM + \mu < 0$$

时，$\lambda = -k$ 特征单根。这样，方程 (25) 的通解为

$$p(\xi) = \big(C_1 + C_2\xi\big)\exp\big(-k\xi\big) + \sum_{j=0}^{s} a_j\xi^{j+1}\exp(-k\xi). \tag{28}$$

当 $M \neq \pm\sqrt{\gamma+\delta}$ 时，$\lambda = -k$ 不是特征根。这样，方程 (25) 的通解为

$$\begin{aligned} p(\xi) \;=\; & C_3\exp\left[\frac{1}{2m^2}\left[\mu - 2km^2 - 2Mm - \sqrt{\mu^2 + 4m^2(\gamma+\delta) - 4mM\mu}\,\right]\xi\right] \\ & + C_4\exp\left[\frac{1}{2m^2}\left[\mu - 2km^2 - 2Mm + \sqrt{\mu^2 + 4m^2(\gamma+\delta) - 4mM\mu}\,\right]\xi\right] \\ & + \sum_{j=0}^{s} b_j\xi^j\exp(-k\xi). \end{aligned} \tag{29}$$

情形 2 当 $A_1^2 - 4A_2 = 0$，即 $\mu^2 + 4m^2(\gamma+\delta) - 4mM\mu = 0$ 时，方程 (25) 的特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2m^2}(\mu - 2km^2 - 2Mm). \tag{30}$$

当 $\mu - 2mM = 0$ 时，$\lambda = -k$ 为特征重根。方程 (25) 的通解为

$$p(\xi) = (C_5 + C_6\xi)\exp(-k\xi) + \sum_{j=0}^{s} c_j\xi^{j+2}\exp(-k\xi). \tag{31}$$

当 $\mu - 2mM \neq 0$ 时，$\lambda = -k$ 不是特征根。方程 (25) 的通解为

$$p(\xi) = (C_7 + C_8\xi)\exp\left[\frac{1}{2m^2}(\mu - 2km^2 - 2Mm)\xi\right] + \sum_{j=0}^{s} d_j\xi^j\exp(-k\xi), \tag{32}$$

其中 a_j, b_j, c_j, d_j $(j = 0, 1, 2, \cdots, s)$ 是已知多项式 $G(\xi)$ 的系数来确定。

情形 3 当

$$A_1^2 - 4A_2 = \frac{\mu^2 + 4m^2(\gamma+\delta) - 4mM\mu}{m^4} < 0$$

时，方程 (25) 的特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2m^2}\left[\mu - 2km^2 - 2Mm \pm \sqrt{-\mu^2 - 4m^2(\gamma - \delta) + 4mM\mu}\mathrm{i}\ \right], \tag{33}$$

当 $\mu - 2mM = 0$ 时

$$\lambda_{1,2} = -k \pm \frac{1}{m^2}\sqrt{m^2\left[M^2 - (\gamma + \delta)\right]}\mathrm{i}.$$

$G(\xi)$ 给定下面形式时，考虑方程 (25) 的通解

$$G(\xi) = \alpha(\xi)\cos\left[\frac{1}{m^2}\sqrt{m^2[M^2 - (\gamma+\delta)]}\xi\right] + \beta(\xi)\sin\left[\frac{1}{m^2}\sqrt{m^2[M^2 - (\gamma+\delta)]}\xi\right].$$

这样，方程 (25) 的通解为

$$\begin{aligned} p(\xi) = &\Big[C_9\cos\Big[\frac{1}{m^2}\sqrt{m^2[M^2 - (\gamma+\delta)]}\xi\Big] \\ &+ C_{10}\sin\Big[\frac{1}{m^2}\sqrt{m^2[M^2 - (\gamma+\delta)]}\xi\Big]\Big]\exp(-k\xi) + p_4(\xi), \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} p_4(\xi) = &\Big[P(\xi)\cos\Big[\frac{1}{m^2}\sqrt{m^2[M^2 - (\gamma+\delta)]}\xi\Big] \\ &+ Q(\xi)\sin\Big[\frac{1}{m^2}\sqrt{m^2[M^2 - (\gamma+\delta)]}\xi\Big]\Big]\exp(-k\xi), \end{aligned} \tag{35}$$

其中 $P(\xi)$, $Q(\xi)$ 的系数是由已知的次数不超过 s 次的多项式 $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$ 的系数来确定。

将 (6) 式分别与 (28), (29), (31), (32) 和 (34), (35) 一起代入 (3) 式即可得到 $(2+1)$ 维修改的色散水波方程 (1), (2) 下列新的复合型精确解

$$\begin{cases} u_1(x,y,t) = M + \dfrac{m[C_2 + A'(\xi) + q'(\xi)]}{A(\xi) + C_1 + C_2\xi + q(\xi)}, \\ v_1(x,y,t) = \dfrac{\partial u_1(x,y,t)}{\partial y}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2(x,y,t) = M + \dfrac{m\big[(k+\lambda_1)C_3\exp[(k+\lambda_1)\xi] + (k+\lambda_2)C_4\exp[(k+\lambda_2)\xi] + B'(\xi) + q'(\xi)\big]}{B(\xi) + C_3\exp[(k+\lambda_1)\xi] + C_4\exp[(k+\lambda_2)\xi] + q(\xi)}, \\ v_2(x,y,t) = \dfrac{\partial u_2(x,y,t)}{\partial y}, \end{cases}$$

式中

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2m^2}\left[\mu - 2km^2 - 2Mm \pm \sqrt{\mu^2 + 4m^2(\gamma+\delta) - 4mM\mu}\ \right].$$

另外

$$\begin{cases} u_3(x,y,t) = M + \dfrac{m(C_6 + C'(\xi) + q'(\xi))}{C_5 + C_6\xi + C(\xi) + q(\xi)}, \\ v_3(x,y,t) = \dfrac{\partial u_3(x,y,t)}{\partial y}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_4(x,y,t) = M + \dfrac{m\big[C_8\exp[(k+\lambda_1)\xi] + (C_7 + C_8\xi)(k+\lambda_1)\exp[(k+\lambda_1)\xi] + D'(\xi) + q'(\xi)\big]}{D(\xi) + (C_7 + C_8\xi)\exp[(k+\lambda_1)\xi] + q(\xi)}, \\ v_4(x,y,t) = \dfrac{\partial u_4(x,y,t)}{\partial y}, \end{cases}$$

其中

$$\lambda_1 = \frac{1}{2m^2}(\mu - 2km^2 - 2Mm).$$

再有

$$\begin{cases} u_5(x,y,t) = M + \dfrac{m\big[[\rho C_{10} + \rho Q(\xi) + P'(\xi)]\cos(\rho\xi) + [-\rho C_9 - \rho P(\xi) + Q'(\xi)]\sin(\rho\xi) + q'(\xi)\big]}{[C_9 + P(\xi)]\cos(\rho\xi) + [C_{10} + Q(\xi)]\sin(\rho\xi) + q(\xi)}, \\ v_5(x,y,t) = \dfrac{\partial u_5(x,y,t)}{\partial y}, \end{cases}$$

其中

$$\rho = \frac{1}{m^2}\sqrt{m^2\big(M^2 - (\gamma + \delta)\big)}, \quad A(\xi) = \sum_{j=0}^{s} a_j \xi^{j+1}, \quad B(\xi) = \sum_{j=0}^{s} b_j \xi^j,$$

$$C(\xi) = \sum_{j=0}^{s} c_j \xi^{j+2}, \quad D(\xi) = \sum_{j=0}^{s} d_j \xi^j,$$

$P(\xi)$, $Q(\xi)$ 的系数是由次数不超过 s 次的已知多项式 $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$ 的系数来确定，$A(\xi)$, $B(\xi)$, $C(\xi)$, $D(\xi)$ ($\xi = mx+ny+\mu t$) 是由次数为 s 次的已知多项式 $q(\xi)$ 的系数来确定，$C_l(l = 1,2,\cdots,10)$ 是任意常数。$q'(\xi)$, $A'(\xi)$, $B'(\xi)$, $C'(\xi)$, $D'(\xi)$, $P'(\xi)$, $Q'(\xi)$ 表示关于 ξ 的一阶导数。

4　结论

本文在文献 [1-8] 的基础上，给出一种函数变换 (6)，并通过该变换，把线性偏微分方程 (5) 转化为一个二阶常系数非齐次线性常微分方程。经讨论方程 (7) 的解得到了一些非线性发展方程的新的复合型精确解。限于篇幅，这里构造了 (2 + 1) 维修改的色散水波方程的型如 (1), (2), $\cdots$, (5) 的复合型精确解。该方法也可以得到 (2+1) 维广义的 Burgers 方程、(2+1) 维扩展的 Boussinesq 方程等，非线性发展方程的复合型精确解。文献 [9] 未能得到 (2 + 1) 维修改的色散水波方程的复合型精确解。

参考文献：

[1] Wang M L. Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations[J]. Physics Letters A, 1995, 199: 169-172

[2] Parkes E J, Duffy B R. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to nonlinear evolution equations[J]. Computer Physics Communications, 1996, 98: 288-300

[3] Xie F D, Gao X S. Applications of computer algebra in solving nonlinear evolution equations[J]. Communnications in Theoretical Physics, 2004, 41: 353-356

[4] Chen Y, Li B. New exact travelling wave solutions for generalized Zakharov-Kuzentsov equations using general projective riccati equation method[J]. Communnications in Theoretical Physics, 2004, 41: 1-6

[5] Li H M. An extension of mapping deformation method and new exact solution for three coupled nonlinear partial differential equations[J]. Communnications in Theoretical Physics, 2003, 39: 395-400

[6] Sirendaoreji, Sun J. Auxiliary equation method for solving nonlinear partial differential equations[J]. Phys Letters A, 2003, 309: 387-396

[7] Liu H, He X T, Lou S Y. Quintic nonlinearity induced solitary waves in plasma physics[J]. Chinese Physics Letters, 2002, 19: 87-90

[8] Lin J, Li H M. Painlevé integrability and abundant localized structures of (2+1)-dimensional higher order broer-kaup system[J]. Zeitschrift für Naturforsch A, 2002, 57: 929-936

Constructing New Exact Complex Solutions to Nonlinear Evolution Equations with the Function Transformation

Taogetusang, Sirendaoerji

(College of Mathematical Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022)

Abstract: In this paper, nonlinear evolution equations with constant coefficients are changed into the second order non-homogenous ordinary differential equations through introducing a function transformation to search for complex exact solutions of some nonlinear evolution equations. Based on the theory of ordinary differential equations, the $(2+1)$-dimensional modified dispersion wave equation is chosen as an example and the new complex exact solutions are obtained with the help of symbolic computation system Mathematica, which include single solitary solutions and double solitary solutions of the composite type composed by exponential function, triangular function and rational function in different forms.

Keywords: function transformation; ordinary differential equation; nonlinear evolution equation; exact complex solution

Received: 12 Dec 2008. **Accepted:** 25 May 2009.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10461006); the Science Research Foundation of Institution of Higher Education of Inner Mongolia Autonomous Region (NJZZ07031); the Natural Science Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region (200408020103); the Natural Science Research Program of Inner Mongolia Normal University (QN005023).